Random Graphs

Leonid E. Zhukov

National Research University Higher School of Economics

30.01.2012

Random Graphs

Граф $G\{E, V\}$, узлов $n = |V|$, ребер $m = |E|$

Erdos and Renyi, 1959.

Модели случайных графов

- $G_{n,m}$, один случайно выбранный граф из множества $C^m_{n(n-1)/2}$ графов с n узлами и m ребрами
- $G_{n,p}$, каждая пара узлов связана с вероятностью p
  m - случайная величина
  все графы с m узлами имеют вероятность

$$P(G(m)) = p^m (1-p)^{n(n-1)/2-m}$$

$$\langle m \rangle = p\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\langle k \rangle = \frac{1}{n}\sum_i k_i = \frac{2m}{n} = p\,(n-1) \approx pn$$

Random Graphs

Распределение Бернулли

$$P(k_i = k) = P(k) = C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k}$$

В пределе $n \to \infty$ при фиксированном $\langle k \rangle = pn = z$
Распределение Пуассона

$$P(k) = \frac{\langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle}}{k!} = \frac{z^k e^{-z}}{k!}$$

Random Graphs

Фазовый переход. $G_{n,p}$ как функцию от p

- $p = 0$, empty graph
- $p = 1$, full graph
- Существует p_c, качественные изменения при переходе от $p < p_c$ к $p > p_c$
- при $p > p_c$ возникает гигантская связанная компонента GCC

Random Graphs

Пусть u – доля узлов не принадлежащих GCC. Вероятность что не принадлежит

$$u = P(k=1)\cdot u + P(k=2)\cdot u^2 + P(k=3)\cdot u^3 ... =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(k)u^k = \sum_{k=0} \frac{z^k e^{-z}}{k!} u^k = e^{-z} e^{zu} = e^{z(u-1)}$$

$$s = 1 - u$$

$$1 - s = e^{-zs}$$

при $z \to \infty, \quad S \to 1$
при $z \to 0, \quad S \to 0$

Random Graphs

s -доля узлов принадлежащих GCC

$$1 - s = e^{-zs}$$

ненулевое решение появляется при условии

$$1 = ze^{-zs}$$

критическое значение

$$z = 1, \quad z = p_c n,$$

$$\langle k \rangle = p_c n = 1, \quad p_c = \frac{1}{n}$$

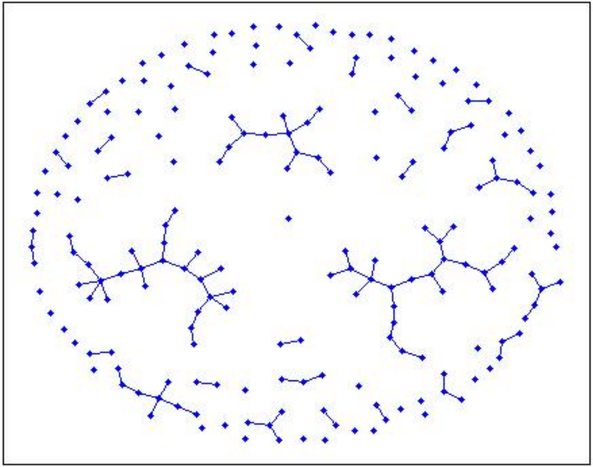
у узла в среднем больше чем один сосед

Random Graphs

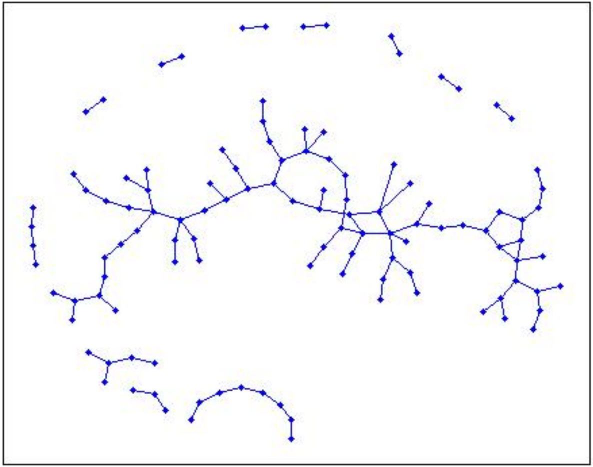
для $n \to \infty$

- при $p < p_c = 1/n$, ($\langle k \rangle < 1$) нет компонент с числом узлов больше $O(\ln n)$, все либо деревья, либо максимум один цикл, максимальная компонента дерево
- при $p = p_c = 1/n$, ($\langle k \rangle = 1$) наибольшая компонента содержит $O(n^{2/3})$ узлов
- при $p > p_c = 1/n$, ($\langle k \rangle > 1$) гигнатская компонента содержит $O(n)$ узлов

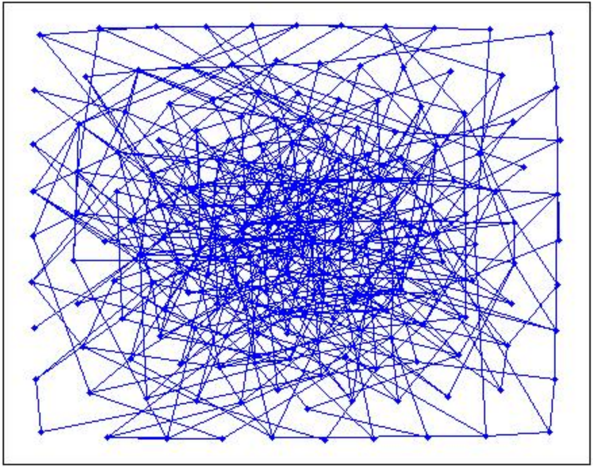
Random Graphs



Random Graphs



Random Graphs



Random Graphs

Диаметр при $p > p_c$ $\langle k \rangle^d = n$

$$d = \frac{\ln n}{\ln \langle k \rangle} = \frac{\ln n}{\ln pn}$$

Кластерный коэффициент

$$C(k) = \frac{\#\text{of links between NN}}{\#\text{max number of links NN}} = \frac{pk(k-1)/2}{k(k-1)/2} = p$$

$$C = p = \frac{\langle k \rangle}{n}$$

Для $n \to \infty, \quad C \to 0$

Random Graphs

Configuration model
можно подобрать последовательность степеней узлов
$D = \{k_1, k_2, k_3..k_n\}: \sum_i k_i = 2m$ так, чтобы следовала данному $P(k)$.
Например 1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3...

$$P(k) = \frac{\#(k_i = k)}{2m}$$

Случайно выбираются два элемента из последовательности и формируется ребро